8.1.8 Důkaz matematickou indukcí I

Předpoklady: 080104

Pedagogická poznámka: Rozdělení látky do dvou hodin je nutné brát s rezervou. Při posledním průchodu jsme první hodinou zaplnili skoro dvě vyučovací hodiny a druhá hodina zůstala zájemcům na domácí studium.
Pochopení metody není pro studenty jednoduché. Důkaz uvedený v normálním textu vysvětluji dvakrát. Poprvé žáci nepíší, podruhé projdeme poznámky na tabuli a žáci si udělají poznámky.
Při dokazování indukčního kroku je třeba studentům neustále zdůrazňovat, co známe a dokazujeme. Tam je největší problém.
U procvičovacích příkladů příliš nečekám a počítám i na tabuli, prvním příkladem, který většina třídy spočítá zcela samostatně, bývá první příklad v další hodině, kde už na tabuli spíš nepíšu a odchytávám problémy v sešitech.
Příklady na vzorec pro *n*-tý člen a dělitelnost střídám schválně, protože jednak se mění směr pohledu a jednak to snad trochu brání zmechaničtění metody.

Př. 1: Je dána rekurentní posloupnost $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$. Napiš prvních pět členů posloupnosti a odhadni vzorec pro *n*-tý člen.

Členy posloupnosti: $3;5;7;9;11;...$

Jde o lichá čísla, první je 3 $\Rightarrow$ odhad vzorce $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$.

Pokud dosadíme za $n \in \{1;2;3;4;5\}$ získáme prvních pět členů posloupnosti výše $\Rightarrow$ vzorec $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$ je správný.

Bohužel tak jednoduché to není, nemůžeme s jistotou tvrdit, že vzorec $a_n = 2n+1$ platí pro všechna přirozená čísla *n*, vždyť jsme ho zkusili pouze na prvních pět čísel (z nekonečna). Zatím jde pouze o hypotézu (podloženou pěti výpočty). Jak dál?

Vyzkoušet všechna přirozená čísla nejde (je jich nekonečně mnoho) $\Rightarrow$ musíme uvažovat jinak.
Náhodně vyzkoušíme, jak vypadá situace pro větší čísla:
Kolik by mělo být a_{100}? $a_{100} = 2n+1 = 2\cdot 100+1 = 201$.
Předpokládáme, že a_{100} je správně. Bude vzorec správně také pro a_{101}?
Když známe a_{100} můžeme to ověřit dosazením do rekurentního vzorce (který je správně určitě): $a_n = a_{101} = a_{100} + 2 = 201 + 2 = 203 = 202 + 1 = 2(101) + 1 = 2n+1$.
Pokud platí vzorec pro a_{100}, platí vzorec i pro a_{101}.

Nešlo by to obecně pro a_k a a_{k+1}?
Předpokládáme, že platí: $a_k = 2k+1$, chceme dokázat, že platí: $a_{k+1} = 2(k+1)+1$.
Zkusíme to z rekurentního vztahu:
$a_{k+1} = a_k + 2 = 2k+1+2 = 2k+2+1 = 2(k+1)+1$ $\Rightarrow$ přesně vzorec, který jsme chtěli.

Tím jsme dokázali, že vzorec opravdu platí pro všechna přirozená čísla.

Jak to?
Zopakujeme si, co víme:
1. Vzorec platí pro $a_1; a_2; a_3; a_4 a_5$
2. Pokud platí vzorec pro libovolný člen a_k, platí i pro následující člen a_{k+1}.
$\Rightarrow$

- platí-li vzorec pro a_5 (už víme, že platí, z bodu 1), platí i pro a_6,
- platí-li vzorec pro a_6 (už víme z předchozí řádky), platí i pro a_7,
- platí-li vzorec pro a_7 (už víme z předchozí řádky), platí i pro a_8,
- a tak by šlo pokračovat pořád dál až do nekonečna.

Můžeme argumentovat i obráceně. Co kdyby vzorec pro nějaké členy neplatil? Vezmeme první takový člen a označíme ho a_{m+1}. Pro předchozí člen a_m, ale vzorec platí (aby a_{m+1} byl prvním členem, pro který vzorec neplatí) $\Rightarrow$ podle bodu 2 platí vzorec i pro a_{m+1} (spor s tím, že pro něj neplatí).

Přirovnání: Do třídy přichází nový student a pan ředitel říká, že bude nejmenší ve třídě. Jak to ověřit? Aby se nemusel se všemi přeměřovat, postavíme třídu do řady podle velikosti. Pokud bude kdokoliv v řadě větší než nováček, bude větší než nováček i ten, který je napravo (jako větší) od něj (analogie bodu 2). Stačí přeměřit nováčka s prvním studentem v řadě (tím nejmenším) (analogie bodu 1), pokud je tento větší než nováček, je nováček opravdu nejmenší.

Právě jsme si ukázali nový typ matematického důkazu, **důkaz matematickou indukcí**.
Tímto důkazem se dokazují věty typu: „Pro všechna přirozená čísla platí $V(n)$“.

Důkaz matematickou indukcí se skládá ze dvou kroků:
1. Dokážeme, že platí $V(n)$ pro $n=1$ (ověření vzorce pro a_1).
2. Pro každé přirozené číslo *k* dokážeme: Jestliže platí $V(k)$, pak platí i $V(k+1)$
(ověření vzorce pro a_{k+1} za předpokladu, že platí pro a_k).

Bod 2 si můžeme představit jako vytvoření řetězu a bod jedna jako přidělání počátku řetězu ke kůlu. Každý článek řetězu je nyní pevně přidělán ke kůlu, protože články drží pohromadě (bod 2) a první je přidělán ke kůlu (bod 1).

Př. 2: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechny členy posloupnosti $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = 2a_n; n \in N$ platí vzorec pro *n*-tý člen $\left(2^{n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Postupujeme podle kroků:
1. Ověření pro $n=1$:
$a_n = 2^{n-2} \Rightarrow a_1 = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ platí (a_1 je $\frac{1}{2}$).
2. Předpokládáme, že vzorec platí pro *k* a dokazujeme ho pro $k+1$:

Předpokládáme, že víme: $a_k = 2^{k-2}$.

Zjišťujeme, zda platí: $a_{k+1} = 2^{(k+1)-2} = 2^{k-1}$ $\Rightarrow$ použijeme rekurentní zadání a spočteme pomocí a_k člen a_{k+1}: $a_{k+1} = 2a_k = 2\cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$,

člen a_{k+1} pomocí vzorce: $a_{k+1} = 2^{(k+1)-2} = 2^{k-1}$,

$\Rightarrow$ pomocí předpokladu $a_k = 2^{k-2}$ jsme získali vztah pro a_{k+1} $\Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*.

Př. 3: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $3/n^3+2n$ (3 dělí číslo n^3+2n).

Postupujeme podle kroků:
1. Ověření pro $n=1$:
$n^3+2n=1^3+2\cdot 1=3$ je dělitelné 3 $\Rightarrow$ platí
2. Předpokládáme, že věta platí pro *k* a dokazujeme ji pro $k+1$:
Předpokládáme, že víme: $3/k^3+2k$.
Zjišťujeme, zda platí: $3/(k+1)^3+2(k+1)$ $\Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili $3/k^3+2k$:
$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+2k+2=k^3+2k+3k^2+3k+3=k^3+2k+3(k^2+k+1)$
červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $3/k^3+2k$ $\Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*.

Z předchozích dvou příkladů je vidět výhoda důkazu matematickou indukcí: dosazení pro $n=1$ je mechanická záležitost, při dokazování indukčního kroku pak víme, jaký tvar potřebujeme získat.

Př. 4: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $5/2^{4n+3}-3$ (5 dělí číslo $2^{4n+3}-3$).

Postupujeme podle kroků:
1. Ověření pro $n=1$:
$2^{4n+3}-3=2^{4\cdot 1+3}-3=2^7-3=128-3=125$ je dělitelné 5 $\Rightarrow$ platí.
2. Předpokládáme, že věta platí pro *k* a dokazujeme ji pro $k+1$:
předpokládáme, že víme: $5/2^{4k+3}-3$.
Zjišťujeme, zda platí: $5/2^{4(k+1)+3}-3$ $\Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili $5/2^{4k+3}-3$:
$2^{4(k+1)+3}-3=2^{4k+7}\underbrace{-2^{4k+3}+2^{4k+3}}_{0}-3=2^{4k+3}(2^4-1)+2^{4k+3}-3=2^{4k+3}\cdot 15+2^{4k+3}-3$.
Červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $5/2^{4k+3}-3$ $\Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad studenti sami nevyřeší kvůli použití triku s přičtením nuly. Je třeba, abyste jim pomohli rozlišit, že metodu indukce umí i přes to, že je trik nenapadl.

Př. 5: Petáková:
strana 150/cvičení 101 a)
strana 150/cvičení 102 a)

Shrnutí: Důkaz matematickou indukcí má dva kroky: v prvním kroku zkontrolujeme platnost pro první člen (připevňujeme počátek řetězu), ve druhém z platnosti pro *k*-tý člen dokážeme platnost pro $k+1$ člen (jednotlivé články řetězu drží pohromadě).